MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 7
6.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Lösungsvorschlag-

1. a) Wir zeigen beide Inklusionen “$\subset$“ und “$\supset$“ auf einmal:

   Für $x \in X$ gilt unter Verwendung der Definition des Urbilds

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \ \vee \ f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \ \vee \ x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

   b) ... und ganz genauso hier:
   Für $x \in X$ gilt unter Verwendung der Definition des Urbilds

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \ \wedge \ f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \ \wedge \ x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2. Wir versuchen zunächst, y in Abhängigkeit von x explizit zu berechnen, also die Gleichung

$$\frac{y + r \cdot x}{y + s \cdot x} = 2$$

nach y aufzulösen. Dies geht folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \frac{y + r \cdot x}{y + s \cdot x} = 2 \\ \implies\ & y + r \cdot x = 2(y + s \cdot x) \\ \iff\ & y + r \cdot x = 2y + 2s \cdot x \\ \iff\ & r \cdot x - 2s \cdot x = y \\ \iff\ & (r - 2s) \cdot x = y. \end{aligned}$$

Wir erhalten also $y = (r - 2s) \cdot x$ als einzige mögliche Lösung; da die Umformungskette einen Implikationspfeil enthält, der keine Äquivalenz ist (der umgekehrten Schlußrichtung steht die Möglichkeit einer Division durch 0 entgegen!), müssen wir die Probe machen, also den folgenden Ausdruck betrachten:

$$\frac{(r - 2s) \cdot x + r \cdot x}{(r - 2s) \cdot x + s \cdot x} = \frac{(2r - 2s) \cdot x}{(r - s) \cdot x}$$

Dieser Bruch hat tatsächlich stets den Wert 2, *außer* im Fall, daß sein Nenner versehentlich null wird. Wegen $x \neq 0$ (es gilt $0 \notin \mathbb{N}$!) tritt dieser Fall genau dann ein, wenn $r = s$ ist; und in der Tat ist für $r = s$ die Gleichung

$$\frac{y + r \cdot x}{y + r \cdot x} = 2$$

niemals erfüllt, denn dieser Bruch ist entweder nicht definiert (wenn nämlich sein Nenner zufällig verschwindet), oder er hat den Wert 1.

Unsere Abbildung sollte also x auf die Zahl $(r-2s)\cdot x =: f(x)$ schicken. Nun gibt es aber ein neues Problem: Diese Zahl könnte ≤ 0 sein und damit außerhalb der angegebenen Zielmenge $\mathbb{N}$ liegen. Dies passiert genau dann, wenn $r-2s \leq 0$, also $r \leq 2s$ ist; für alle anderen Werte ist alles in Ordnung.

Insgesamt liefert die angegebene Vorschrift also genau dann eine Abbildung, wenn $r > 2s$ ist (denn dann ist insbesondere auch $r \neq s$), und dann ist $f(x) = (r-2s)\cdot x$.

3. a) Es sei $y \in f(f^{-1}(B))$; nach Definition von $f(\dots)$ bedeutet das, dass es ein $x \in f^{-1}(B)$ gibt mit $y = f(x)$. Nach Definition von $f^{-1}(B)$ ist dann aber $f(x) \in B$, und wegen $f(x) = y$ folgt $y \in B$. Also gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

   b) Beispielsweise kann man $M = \mathbb{N}$, $N = \mathbb{Z}$ und $B = \{-1\} \subset \mathbb{Z}$ wählen und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ (die sogenannte „Einbettungsabbildung"). Dann ist $f^{-1}(B) = \varnothing$ und damit auch $f(f^{-1}(B)) = \varnothing \subsetneqq B$.

   Auch das folgende Beispiel funktioniert:
   Seien $X = Y = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f(x) = 1$ (konstante Abbildung). Sei $B := [0,2] \subset \mathbb{R}$. Dann ist

$$f(f^{-1}(B)) \ = \ f(\mathbb{R}) = \{1\} \subsetneqq B. \quad \checkmark$$

Ähnlich wie in Aufgabe 3 vom Tutoriumsblatt 7 kann man ein solches Beispiel finden, indem man versucht, die Aussage „$B \subset f(f^{-1}(B))$" zu beweisen. Dazu müssen wir also $y \in B$ als gegeben annehmen; um zu beweisen, dass y auch in $f(f^{-1}(B))$ läge, müßte erst einmal y *überhaupt* von der Abbildung f getroffen werden – und dafür gibt es im allgemeinen keinen Grund. Wir müssen also zur Konstruktion eines Gegenbeispiels nur die Mengen und die Abbildung so wählen, dass B ein Element besitzt, das nicht von f getroffen wird.

4. a) Man beachte, daß es sich bei den Mengen $(f\circ g)^{-1}(C)$, $\ f^{-1}(C)$ und auch $g^{-1}(f^{-1}(C))$ um Urbilder handelt. Es ist nicht vorausgesetzt, daß die betrachteten Abbildungen bijektiv sind!

   Wir wollen für $C \subset N$

$$(f\circ g)^{-1}(C) \ = \ g^{-1}(f^{-1}(C)).$$

   zeigen, und zeigen dazu wieder beide InKlusionen auf einmal:
   Es ist für $x \in X$ unter Verwendung der Definition des Urbilds, sowie der Komposition $f\circ g$

$$\begin{aligned} x \in (f\circ g)^{-1}(C) \quad &\Longleftrightarrow \quad (f\circ g)(x) \in C \\ &\Longleftrightarrow \quad f(g(x)) \in C \\ &\Longleftrightarrow \quad g(x) \in f^{-1}(C) \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in g^{-1}(f^{-1}(C)). \quad \checkmark \end{aligned}$$

   b) Wir verwenden a) mit $C :=]\infty, -5] \subset \mathbb{R}$: Es ist

$$f^{-1}(C) = \{y \in \mathbb{Q} \mid f(y) \in C\} \ = \ \{y \in \mathbb{Q} \mid 4y^2 - 37y + 4 \leq -5\}.$$

   Nun ist nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen aus Kapitel 3 ist für zunächst $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 4y^2 - 37y + 4 = -5 \iff & 4y^2 - 37y + 9 = 0 \\ \iff & y_{1/2} = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4\cdot 4\cdot 9}}{8} = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{8} = \frac{37 \pm 35}{8} \\ \iff & y_1 = \frac{37-35}{8} = \frac{1}{4}, \quad y_2 = \frac{37+35}{8} = 9. \end{aligned}$$

also gilt (siehe ebenfalls Kapitel 3)

$$4y^2 - 37y + 4 \le -5 \iff 4y^2 - 37y + 9 \le 0 \iff \frac{1}{4} \le y \le 9.$$

Damit ist

$$D := f^{-1}(C) = \left[\frac{1}{4}, 9\right] \cap \mathbb{Q}.$$

Nun ist

$$g^{-1}(f^{-1}(C)) = g^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{N} \mid g(x) \in D\},$$

und $g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, also gilt für $x \in \mathbb{N}$

$$g(x) \in D \iff \frac{1}{4} \le (x-2)^2 \le 9.$$

Wir schreiben diese Doppelungleichung als zwei einzelne Ungleichungen, bestimmen jeweils deren Lösungsmengen L_1 und L_2, und bilden dann den Schnitt $L := L_1 \cap L_2$.

Es ist

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 \le 9 &\overset{(3.16)}{\iff} -3 \le x-2 \le 3 \\
&\iff -1 \le x \le 5 \\
&\overset{x \in \mathbb{N}}{\iff} x \in \{1,2,3,4,5\} =: L_1.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \le (x-2)^2 &\overset{(3.16)}{\iff} x-2 \ge \frac{1}{2} \ \vee \ x-2 \le -\frac{1}{2} \\
&\iff x \ge 2.5 \ \vee \ x \le 1.5 \\
&\overset{x \in \mathbb{N}}{\iff} x \in \{1,3,4,5,6,...\} =: L_2.
\end{aligned}$$

Also ist

$$L := (f \circ g)^{-1}(C) = L_1 \cap L_2 = \{1,3,4,5\}.$$